Prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

www.zemris.fer.hr/~bojana
bojana.dalbelo@fer.hr

UMJETNA INTELIGENCIJA

Zaključivanje uporabom predikatne logike (1)

- PROPOZICIJSKA LOGIKA << LJUDSKO ZAKLJUČIVANJE

- *Premise:*

    Svaki student pohađa predavanja.

    Ivan je student.
- *Intuitivno zaključujemo:*

    Ivan pohađa predavanja.

- Ovakvo jednostavno zaključivanje nije moguće u propozicijskoj logici.

ONTOLOŠKA PRETPOSTAVKA

- **Ontologija?**
- **Ontološka pretpostavka** predikatne logike prvog reda:
  - postoje:
    - **Objekti**
    - **Relacije između objekata**
  - Svojstva objekata: 1-mjesne relacije
  - Propozicije: 0-mjesne relacije
- Jače ontološke pretpostavke od onih propozicijske logike
  - Propozicijska logika: postoje sudovi koji su istiniti/lažni
  - Zbog toga: **veća ekspresivnost od propozicijske logike!**
- Naprednije logike imaju još jače ontološke pretpostavke!

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Skup elemenata nad kojim se izvodi zaključivanje uporabom predikatne logike naziva se **domena**
- Elementi domene označeni su posebnim imenima i nazivaju se **konstante**
  - Mala slova s početka abecede: *a*, *b*, *c*, ... ili nizovi znakova s velikim početnim slovom: *Ivan*, *Ana*, ...
  - *Primjer:* Domena može biti skup cijelih brojeva Z, tada su 1,2,3,… konstante
- **Varijable** se označavaju simbolima *u*,*v*, *w*, *x*, *y*,… i mogu poprimiti bilo koju vrijednost iz domene
- **Funkcije** preslikavaju jedan ili više elemenata domene u taj isti skup
  - *Primjer*: Funkcija *add* preslikava dva elementa domene u njihov zbroj. Dakle, *add*(2, 3) = 5

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- *Definicija*
- **Predikati** su “funkcije” koje preslikavaju jedan ili više elemenata domene u jednu od vrijednosti istinitosti: *istinu* ili *laž*
- Predikati nam govore o svojstvima elemenata domene ili o njihovim međusobnim odnosima.
- *Primjeri* predikata:
  - Neka je domena skup cijelih brojeva Z.
  - Predikati su: ODD(x), EVEN(x), GT(u, v).
    - ODD(6) ≡ laž
    - EVEN(6) ≡ istina
    - GT(*add*(1,2), 4) ≡ laž

Konstante, **varijable**, **funkcije** i **predikat**i čine četiri disjunktna skupa u predikatnoj logici.

Definicija

- **Izraz** (*engl. term*) je definiran rekurzivno:
  - konstanta je izraz
  - varijabla je izraz
  - $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je izraz akko je f funkcija od n argumenata, gdje su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ izrazi

- *Primjer:* Izrazi su 2, 3, *add*(3,4), *add*(v, *add*(1, 4))

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Definicija

- P(t_1, t_2, … , t_n) je **atom** akko P označava predikat od *n* argumenata, a t_1, t_2, … , t_n su izrazi

Primjer

- GT(*add*(1, 2), 4) je atom

FORMULE

- Za izgradnju formula u predikatnoj logici koriste se isti logički veznici kao i u propozicijskog logici ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Primjer

- (ODD(3) $\wedge$ GT(5,2)) čini formulu

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- U predikatnoj logici još se koriste dva posebna simbola:
  - ∀ univerzalni kvantifikator (čita se “za svaki”),
  - ∃ egzistencijalni kvantifikator (čita se “postoji”).

Primjer

- Formula ∀x(GT(*add*(x,1),x)) se interpretira:
  “za svaki *x* domene vrijedi da je *x+1* veći od *x*”
- Za formulu u gornjem primjeru se kaže da je pojavljivanje varijable x **ograničeno** (kvantificirano) sa ∀x
- Kažemo da je varijabla **vezana** ako je negdje ograničena kvantifikatorom, a **slobodna** ako to negdje nije

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Podformula (GT(*add*(x,1),x)) zove se **doseg** (područje djelovanja, djelokrug, dohvat, domena) od $\forall x$ jer se na tu formulu odnosi $\forall x$

Primjer

- $\exists y(GT(y, 4))$
- postoji (*postoji barem jedan* ili *za neki*) element domene *y* tako da je *y* veći od 4;
- *y* je vezana varijabla, tj. pojavljivanje *y* ograničeno je sa $\exists y$,
- doseg od $\exists y$ je GT(y, 4)

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Primjer

- $\forall$u(ODD(u) $\rightarrow$ EVEN(*add*(u,1)))
- za svaki element domene *u* vrijedi: ako je *u* neparan tada je *u+1* paran.
- *u* je vezana varijabla, tj. pojavljivanje *u* ograničeno je sa $\forall$u,
- doseg $\forall$u je (ODD(u) $\rightarrow$ EVEN(ADD(u,1)))

- $\forall$x($\exists$y(GT(x, y)))
- za svaki *x* iz domene postoji *y* iz domene tako da je *x* veće od *y*.
- pojavljivanje *x* ograničeno je sa $\forall$x, pojavljivanje *y* ograničeno je sa $\exists$y.
- doseg od $\forall$x je $\exists$y(GT(x, y)), doseg od $\exists$y je GT(x, y) – doseg jednog kvantifikatora je unutar dosega drugog kvantifikatora!

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Definicija

- Kaže se da je varijabla **vezana** u formuli akko je barem jedno pojavljivanje varijable ograničeno. Varijabla je **slobodna** u formuli akko barem jedno pojavljivanje nije ograničeno

Primjer

- U formuli $\forall$x(GT(x,y)), *x* je vezana, ali *y* je slobodna
- U formuli ($\forall$x(GT(x,y)) $\wedge$ $\exists$y(ODD(y))), *y* je ujedno i slobodna i vezana varijabla
  - Slobodna varijabla *y* nezavisna je od vezane

Formula u predikatnoj logici je definirana rekurzivno:

Definicija

- **Dobro oblikovana formula (wff)** gradi se na sljedeći način:
  1. atom je formula;
  2. ako je F formula tada je i (~F) formula;
  3. ako su F i G formule tada su formule:
     - $(F \wedge G)$
     - $(F \vee G)$
     - $(F \rightarrow G)$
     - $(F \leftrightarrow G)$

4. Ako je F formula takva da **sadržava varijablu *x*** koja u **njoj nije vezana**, tada su formule:
   - $(\forall x)$ F,
   - $(\exists x)$ F.
5. Nema drugih formula osim upravo definiranih

- **Dogovorno dopuštamo uklanjanje zagrada:**
  - u pravilu 2 (zagrade oko negirane formule)
  - u pravilu 3 ako su to **vanjske zagrade**
  - u pravilu 4 (zagrade oko kvantifikatora)

- Uočite da se definicije atoma i formule razlikuju u propozicijskoj i predikatnoj logici.

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

Primjer :

- Formula $((\forall x)\ GT(x,y) \wedge (\exists y)\ ODD(y))$ može se napisati kraće kao $\forall x\ GT(x,y) \wedge \exists y\ ODD(y)$

- Zagrade uvijek moraju zatvarati argumente funkcije ili predikata

Zadatak

- Kako bi formulom predikatne logike izrazili da za svaki cijeli broj *x* vrijedi da je *x* paran ili je *x+1* paran ?

- Je li izraz $\forall x(ODD(x \vee \mathit{add}(x+1)))$ dobro oblikovana formula?

SINTAKSA PREDIKATNE LOGIKE

- Ovdje razmatrana predikatna logika je tzv. PREDIKATNA LOGIKA PRVOG REDA *(engl. First Order Predicate Logic -* ***FOPL****)* u kojoj samo varijable mogu biti kvantificirane

- Ako je P predikat i *f* funkcija tada formule poput $\forall P(P(x))$ i $\exists f(f(x))$ nisu razmatrane u predikatnoj logici prvog reda

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

- **Interpretacija formule** u predikatnoj logici sastoji se od sljedećeg:
  1. Određivanje elemenata domene. Svaki element domene označava se simbolom za konstantu.
  2. Definiranje preslikavanja *f* za svaku funkciju *f* od *n* argumenata $f\ (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, gdje c_i predstavljaju konstante iz domene.
  3. Pridruživanje vrijednosti istinitosti svakom predikatu od *n* argumenata $P(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$

     n-torke za koje $P(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ zovemo **ekstenzija predikata**

SEMANTIKA PREDIKATNE LOGIKE

- Za danu interpretaciju formuli se pridružuje odgovarajuća vrijednost istinitosti
- **Ne mogu se interpretirati formule koje sadrže slobodne varijable** pa ćemo od sada podrazumijevati da formule ne sadrže slobodne varijable
- Formule su **ekvivalentne** ako poprimaju istu vrijednosti istinitosti za svaku moguću interpretaciju

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

- F(x) i G(x) označavaju formule koje sadrže slobodnu varijablu *x* dok H{x} označava formulu koja ne sadrži varijablu *x*

$$
\begin{array}{lll}
[1] & \forall x\, F(x) & \equiv \quad \forall y\, F(y) \\
[2] & \exists x\, F(x) & \equiv \quad \exists y\, F(y) \\
[3] & \sim\forall x\, F(x) & \equiv \quad \exists x\, (\sim F(x)) \\
[4] & \sim\exists x\, F(x) & \equiv \quad \forall x\, (\sim F(x)) \\
[5] & (\forall x\, F(x) \vee \forall x\, G(x)) & \equiv \quad (\forall x\, F(x) \vee \forall y\, G(y)) \\
[6] & (\forall x\, F(x) \vee \exists x\, G(x)) & \equiv \quad (\forall x\, F(x) \vee \exists y\, G(y))
\end{array}
$$

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

[7]	$(\exists x\ F(x) \lor \forall x\ G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\ F(x) \lor \forall y\ G(y))$
[8]	$(\exists x\ F(x) \lor \exists x\ G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\ F(x) \lor \exists y\ G(y))$
[9]	$(\forall x\ F(x) \land \forall x\ G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \land \forall y\ G(y))$
[10]	$(\forall x\ F(x) \land \exists x\ G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \land \exists y\ G(y))$
[11]	$(\exists x\ F(x) \land \forall x\ G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\ F(x) \land \forall y\ G(y))$
[12]	$(\exists x\ F(x) \land \exists x\ G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\ F(x) \land \exists y\ G(y))$
[13]	$(\forall x\ F(x) \lor \forall y\ G(y))$	$\equiv$	$\forall x\ \forall y\ (F(x) \lor G(y))$
[14]	$(\forall x\ F(x) \land \forall y\ G(y))$	$\equiv$	$\forall x\ \forall y\ (F(x) \land G(y))$
[15]	$(\forall x\ F(x) \lor H\{x\})$	$\equiv$	$\forall x\ (F(x) \lor H\{x\})$
[16]	$(\forall x\ F(x) \land H\{x\})$	$\equiv$	$\forall x\ (F(x) \land H\{x\})$
[17]	$(\exists x\ F(x) \lor H\{x\})$	$\equiv$	$\exists x\ (F(x) \lor H\{x\})$
[18]	$(\exists x\ F(x) \land H\{x\})$	$\equiv$	$\exists x\ (F(x) \land H\{x\})$
[19]	$\forall x\ (F(x) \land G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \land \forall x\ G(x))$
[20]	$\forall x\ (F(x) \land G(x))$	$\equiv$	$(\forall x\ F(x) \land \forall y\ G(y))$

TABLICA EKVIVALENCIJA PREDIKATNE LOGIKE

[21]	$\forall x\,(F(x) \wedge G(x))$	$\equiv$	$\forall x\,\forall y\,(F(x) \wedge G(y))$
[22]	$\exists x\,(F(x) \vee G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\,F(x) \vee \exists x\,G(x))$
[23]	$\exists x\,(F(x) \vee G(x))$	$\equiv$	$(\exists x\,F(x) \vee \exists y\,G(y))$
[24]	$\exists x\,(F(x) \vee G(x))$	$\equiv$	$\exists x\,\exists y\,(F(x) \vee G(y))$

- Jesu li ekvivalencije formule [22]-[23] ako se umjesto kvantifikatora $\exists$ koristi kvantifikator $\forall$?

Primjer 1

- Odredite vrijednosti istinitosti formule

  $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,f(y)))$

  za interpretaciju:

  - Domena {a, b}
  - f(a) = b i f(b) = a i sljedeće vrijednosti istinitosti atoma

P(a)	P(b)	Q(a,a)	Q(a,b)	Q(b,a)	Q(b,b)
false	true	true	true	false	true

- Za x = a, P(x) je false.
  - Formula nije istinita za sve vrijednosti x iz domene.
- Dakle $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,f(y)))$ je laž

Primjer 2

- Odredite vrijednosti istinitosti formule

  $$\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,f(y)))$$

  za interpretaciju:

  - Domena {1, 2}
  - f(1) = 2 i f(2) = 1 i sljedeće vrijednosti istinitosti atoma

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
true	true	true	true	false	true

- Evaluacija istinitosti:
  - Za x = 1, P(1) je true.
  - Q(x,f(y)) je istinito za y=1 i y=2

  - Za x = 2, P(2) je true.
  - Q(x,f(y)) je istinito za y=1

- Pokazali smo da za sve vrijednosti x iz domene postoji vrijednost y iz domene za koju je formula istinita
- Dakle, $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(x,f(y)))$ je istinita

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Podsjetimo se pojmova:
  - **tautologije**, **kontradikcije** i **konzistencije** formula propozicijske logike. Iste definicije vrijede i u predikatnoj logici.
- Kako bismo dokazali da je formula G je logička posljedica formula F_1, F_2, … , F_n , uveli smo dvije temeljne metode:
- Izravnu metodu
  - pokazujemo da je $((F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G)$ tautologija
- Metoda opovrgavanja
  - pokazujemo da je $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \sim G)$ proturječje

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Te dvije metode temelje se na provjeri svih mogućih interepretacija formula. Kako u predikatnoj logici domena može biti beskonačna, (npr. skup cijelih brojeva), može biti i beskonačno mnogo interpretacija formule

- Dakle, u takvim slučajevima nije moguće provjeravati tautologiju ili kontradikciju formule pod svim mogućim interpretacijama pa se izravna metoda i metoda opovrgavanja **ne mogu primijeniti na predikatnu logiku**

POLUODLUČLJIVOST PREDIKATNE LOGIKE

- Važan matematički rezultat:

U predikatnoj logici **ne postoji općenit postupak** kojim se dokazuje da je G logička posljedica formule F (ili, ekvivalentno, da je formula F $\rightarrow$ G tautologija), ako ona to jest, odnosno kojim se dokazuje da G nije logička posljedica formule F, ako ona to nije.
Ipak, postoje postupci kojima se, ako G jest logička posljedica, to može dokazati, no ti postupci mogu **nikad ne završiti u slučajevima kada G nije logička posljedica**.
U tom smislu **predikatna je logika poluodlučljiva**.

- **Rezolucija opovrgavanjem** koristi se u predikatnoj logici, ali je njezina moć ograničena poluodlučljivošću predikatne logike

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- Sva pravila zaključivanja (uvedena u okviru "prirodnog zaključivanja") koja vrijede za propozicijsku logiku vrijede i za predikatnu logiku
- Pored toga predikatna logika ima dodatna pravila, npr.:

Pravilo univerzalne specijalizacije

- Ako je formula istinita za svaki element domene onda je istinita i za jedan određeni element domene
- Ako je *x* varijabla i *b* **bilo koja konstanta iz domene** tada:

$$\forall x\, F(x) \;\; \vdash \;\; F(b)$$

Pravilo univerzalne specijalizacije
Svaki element domene može biti zamjena za univerzalno kvantificiranu varijablu

- Primjer uporabe pravila univerzalne specijalizacije u postupku zaključivanja:
- *Premise*
  - Svaki muž voli svoju ženu.
  - Marko je muž.
- *Cilj koji treba dokazati*
  - Marko voli svoju ženu

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- *Predikati:*
  - MUŽ(x); definira da je x muž.
  - VOLI(x,y)

- *Funkcija:*
  - *žena*(x): funkcija koja preslikava *x* u *žena_od_x*. Ako je z = *žena*(x), to znači da je z žena od x

- *Cilj koji treba dokazati:*
  - VOLI(Marko, žena(Marko))

TEORIJA DOKAZA PREDIKATNE LOGIKE

- Premise se mogu napisati

  [1] ∀x(MUŽ(x) → VOLI(x, žena(x)))

  [2] MUŽ(Marko)
- Zaključivanje:
- Marko je konstanta u domeni osoba, stoga primjenjujući pravilo univerzalne specijalizacije na [1] zaključujemo:

  [3] (MUŽ(Marko) → VOLI(Marko, žena(Marko))
- Primjenjujući Modus ponens na [2] i [3] dobivamo:

  [4] VOLI(Marko, žena(Marko))
- Tako smo dokazali da je cilj logička posljedica premisa